Solution 20 :

1°/

a) φ_n est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi_n'(x) = \frac{1}{n}(\tan x)^{\frac{1}{n}-1}.(1+\tan^2 x) = \frac{1+\tan^2 x}{n}.(\tan x)^{\frac{1-n}{n}}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi_n'(x)$	‖	$+$	
$\varphi_n(x)$	‖	↗	$+\infty$
	0		

b) φ_n est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc φ_n est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\varphi_n([0, \frac{\pi}{2}[) = [0, +\infty[= J$. Soit $\psi_n = \varphi_n^{-1}$

c)

- φ_n est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi_n'(x) \neq 0$ donc ψ_n est dérivable sur $\varphi_n(]0, \frac{\pi}{2}[) =]0, +\infty[$.
- Etudions la dérivabilité de ψ_n à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_n(x)-\psi_n(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_n(x)}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\varphi_n(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt[n]{\tan y}}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\tan y}.\frac{\tan y}{\sqrt[n]{\tan y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\frac{\tan y}{y}}.(\tan y)^{1-\frac{1}{n}} = 0$$

Car $\lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 1$ et $\lim_{y\to 0} (\tan y)^{1-\frac{1}{n}} = 0$